MEGOLDÁSOK

5. OSZTÁLY

1. FELADAT (4 PONT)

Az Árpád Gimnáziumban ez év szeptember 1-én kezdődött a 115. tanév.
a) **Melyik évben kezdődött a 100. tanév?**
b) **Melyik évben kezdődött az első tanév?**
c) **Hányadik tanév kezdődött 1986. szeptember 1-én?**
d) **Melyik évben kezdődik majd a 125. tanév?**

a) A 100. tanév 15 évvel ezelőtt, tehát **2001-ben** kezdődött.
b) Az első tanév 114 évvel ezelőtt, tehát **1902-ben** kezdődött.
c) 1986-ban, tehát 30 évvel ezelőtt a **85. tanév** kezdődött.
d) A 125. tanév 10 év múlva, tehát **2026-ban** kezdődik.

2. FELADAT (6 PONT)

Pali bácsi mesélte Réka unokájának: „Képzeld Réka, minden gyerekem elmondhatja magáról, hogy van fiú és lánytestvére is. Azt is tudod, hogy minden gyerekemnek van gyereke. Minden unokámnak is van testvére, de vagy csak fiú vagy csak lánytestvére.”
a) **Legalább hány gyereke van Pali bácsinak?**
b) **Legalább hány unokája van Pali bácsinak?**

a) Ha egy fiúgyereknek van lány és fiú testvére, akkor legalább két fiú van a családban.
Ha egy lánygyermeknek van lány és fiú testvére is, akkor legalább két lány van a családban.
Így a családban legalább két lány és legalább két fiú van.
Ezért Pali bácsinak **legalább négy** gyereke van.
b) Ha egy unokának csak egyfajta testvére van, akkor legkevesebb ketten vannak.
Tehát Pali bácsinak **legalább** ($4 \cdot 2 =$) **nyolc** unokája van.

3. FELADAT (6 PONT)

Orsi gondolt egy egész számot. Megszorozta 2-vel vagy 3-mal vagy 4-gyel, majd hozzáadott 2-t vagy 3-at, vagy 4-et. Így eredményül 2016-ot kapott.
Mely számra (vagy számokra) gondolhatott Orsi?

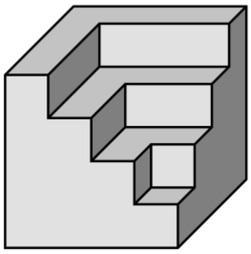
A hozzáadás előtt 2014 vagy 2013 vagy 2012 volt a szám.
A 2014 osztható 2-vel, de 3-mal és 4-gyel nem, ezért ekkor a gondolt szám $2014:2 = 1007$.
A 2013 osztható 3-mal, de 2-vel és 4-gyel nem, ezért ekkor a gondolt szám $2013:3 = 671$.
A 2012 osztható 2-vel és 4-gyel is, de 3-mal nem, ezért ekkor a gondolt szám $2012:2 = 1006$ vagy $2012:4 = 503$ lehetett.
Tehát Orsi által gondolt szám **1007, 671, 1006** vagy **503** volt.

4. FELADAT (6 PONT)

Az 1123 olyan négyjegyű szám, ahol a harmadik számjegy az első két számjegy összege (2 = 1 + 1), a negyedik számjegy pedig a második és harmadik számjegy összege (3 = 1 + 2). Hány ilyen négyjegyű szám van?

Az első két számjegy meghatározza a négyjegyű számot.
1011, (1123), 1235, 1347, 1459
2022, 2134, 2246, 2358
3033, 3145, 3257, 3369
4044, 4156, 4268
5055, 5167, 5279
6066, 6178
7077, 7189
8088
9099
25 darab ilyen tulajdonságú négyjegyű szám van.

5. FELADAT (6 PONT)



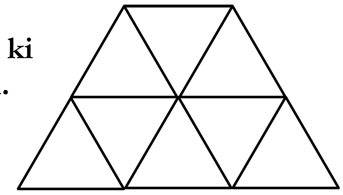
Kockát állítottunk össze 64 db 1 cm élű kiskockákból. Ezután a lehető legkevesebb kiskocka elvételével az ábrán látható testet kaptuk.

***a)* Hány kiskockából áll az ábrán látható test?**
***b)* Ezután ezt a testet befestjük. Egy kiskocka egy lapjának (tehát 1 cm^2-nek) a befestéséhez 2 gramm festék kell. Hány gramm festék kell a test befestéséhez?**

a) **1. megoldás:** $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Ezért eredetileg minden él mentén 4 kiskocka volt.
A legfelső rétegből $3 \cdot 3 = 9$ kockát vettünk el, a következőből $2 \cdot 2 = 4$-et, a következőből pedig 1-et. Így $64 - (9 + 4 + 1) =$ **50** kiskockából áll a test.
2. megoldás: A legalsó réteg 16 kockából, a következő $16 - 1 = 15$ kockából, a következő $16 - 4 = 12$ kockából, a legfelső pedig 7 kockából.
Így $16 + 15 + 12 + 7 =$ **50** kiskockából áll a test.
b) **1. megoldás:** A keletkező test a felszíne ugyanannyi, mint az eredeti kockának, mert ha „kitolnánk” az újonnan keletkező részeket a kocka felületére, akkor az pont fedné a kockát.
Így a test felülete $6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ kockalapnyi (azaz a felszíne 96 cm^2).
Ennek befestéséhez $96 \cdot 2 =$ **192** gramm festék kell.
2. megoldás: A keletkező részek:
3 teljes nagykocka lap, azaz $3 \cdot 16 = 48$ cm^2;
2 db 10 cm^2-es (szemből, illetve jobbról látszó) lap;
1-1 db 7 cm^2-es, 5 cm^2-es, 3 cm^2-es és 1 cm^2-es (felülről látszó) lap;
2-2 db 3cm^2-es, 2 cm^2-es és 1 cm^2-es (szemből, illetve jobbról látszó) lap.
Ez összesen $48 + 20 + 7 + 5 + 3 + 1 + 2 \cdot (3 + 2 + 1) = 96$ cm^2.
Ennek befestéséhez $96 \cdot 2 =$ **192** gramm festék kell.

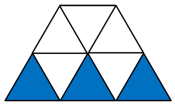
6. FELADAT (8 PONT)

Az ábrán látható kis háromszögek közül hármat kékre színezünk ki úgy, hogy két egymás melletti háromszöget nem színezhetünk ki. (Két háromszög egymás melletti, ha közös egy oldaluk.) Hányféle színezés lehetséges?

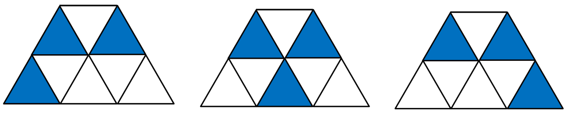


A felső sorban 0 vagy 1 vagy 2 háromszöget színezhetünk, az alsó sorban maximum hármat.

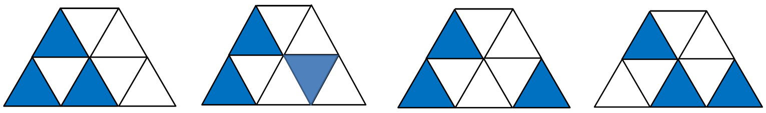
Ha a felső sorban nem színezünk, akkor ez egyféle színezési lehetőség.



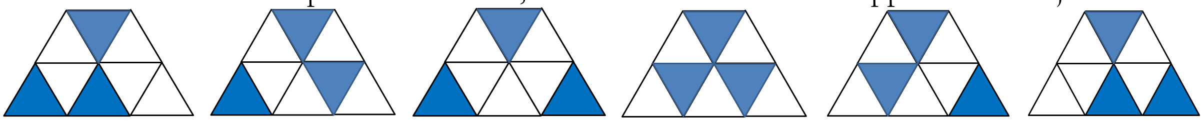
Ha a felső sorban kettőt színezünk, akkor az alsó sorban egyet színezhetünk. Ez háromféle módon lehetséges.



Ha a felső sorban a bal oldalit színezzük ki, akkor az alsó sorban négyféle módon színezhetünk.



Ugyanígy négy színezési lehetőség van, ha a felső sor jobb oldali háromszögét színezzük ki.
Ha a felső sorban a középsőt színezzük ki, akkor az alsó sort hatféleképpen színezhetjük.



Így összesen 1 + 3 + 4 + 4 + 6 = **18-féle** színezés lehetséges.

ÖSSZESEN: 36 pont

MEGOLDÁSOK

6. OSZTÁLY

1. FELADAT (4 PONT)

Egy ötjegyű pozitív egész szám számjegyeinek összege 25.

***a)* Melyik közülük a legnagyobb?**
***b)* Melyik közülük a legkisebb?**
***c)* Melyik közülük a legnagyobb, amelyik csupa különböző számjegyet tartalmaz?**
***d)* Melyik közülük a legkisebb, amelyik csupa különböző számjegyet tartalmaz?**

a) 99700
b) 10699
c) 98710
d) 10789

2. FELADAT (6 PONT)

***a)* Levente kabátján 6 zseb van. 23 db 100 Ft-ost szeretne a zsebeiben úgy elhelyezni, hogy mindegyikben legyen 100 Ft-os, de mindegyik zsebében különböző számú. Hogyan teheti ezt meg?**
***b)* Ezután elkölt 300 Ft-ot, de azt szeretné, ha továbbra is maradna minden zsebében különböző számú 100 Ft-os. Lehetséges-e ez?**

a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 = 23$
$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 = 23$
Tehát az egyik lehetőség, ha az egyes zsebekbe 1, 2, 3, 4, 5 és 8 darab százforintost tesz,
a másik lehetőség pedig, ha 1, 2, 3, 4, 6 és 7 darabot.
b) 20 darab pénzérmével ezt nem tudja megtenni, mert a legkevesebbet rakva az egyes zsebekbe
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ darab százforintosra lenne szüksége.

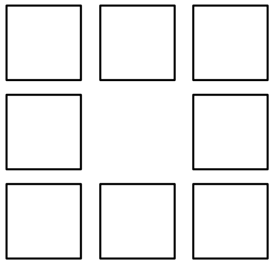
3. FELADAT (6 PONT)

Hány olyan 2016-nál nem nagyobb egész szám van, amelynek a hétszerese legalább 2016?

$2016 : 7 = 288$, tehát a legkisebb ilyen szám a 288 ,
a legnagyobb pedig a 2016.
288-tól 2016-ig $2016 – 287 =$ **1729** darab szám van.

4. FELADAT (6 PONT)

Az ábrán látható nyolc dobozban összesen 60 golyót kellene úgy elhelyezni, hogy mindkét szélső sorban és mindkét szélső oszlopban pontosan 23 golyó legyen.



a) **Hogyan valósítható ez meg? Keress legalább két különböző megoldást!**

b) **Ezután kapunk még 10 golyót. Elhelyezhetőek-e most úgy a golyók a dobozokban, hogy mindkét szélső sorban és mindkét szélső oszlopban ismét pontosan 23 golyó legyen?**

c) **Ezután 25 golyót kiveszünk. Megvalósítható-e most, hogy mindkét szélső sorban és oszlopban pontosan 23 golyó legyen?**

a) Például:

8	7	8		1	5	17
7		7		12		2
8	7	8		10	9	4

b) Például: (*Elég egy megoldás)*

22	1	0		5	12	6
1		23		12		12
0	23	0		6	12	5

c) Ekkor 70 – 25 = 45 golyó lesz összesen. De például a két szélső oszlopban már összesen 46 golyó kellene.
Így **nem valósítható meg** ez az eset.

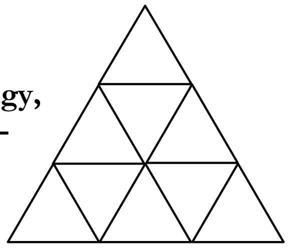
5. FELADAT (6 PONT)

**Eszter és Lili a következő játékot játsszák: felírják 1-től 63-ig az egész számokat a táblára. Ezután felváltva kiválasztanak kettőt, azokat letörlik, és helyettük felírják az összegüket.
A játékot Eszter kezdi. Az nyer, aki utoljára tud felírni számot. (Véget ér a játék, ha már csak egyetlen szám maradt a táblán.)**

a) **Ki nyeri a játékot?**
b) **Milyen számot ír a táblára a győztes?**

a) A táblán lévő számok száma minden lépésben eggyel csökken.
A 63 páratlan szám. Így Eszter számának felírása után mindig páros sok szám lesz a táblán.
Ezért **Lili** nyeri a játékot.
b) Mivel mindig az összegüket írják fel a két letörlött számnak, ezért az utoljára felírt szám az eredeti számok összege,
azaz 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … + 61 + 62 + 63 = 2016 (összeadás pl. párosítással)

6. FELADAT (8 PONT)

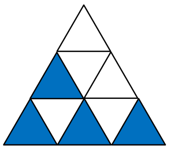
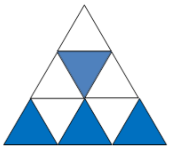
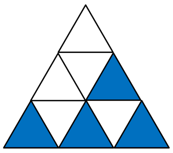


Az ábrán látható kis háromszögek közül négyet kékre színezünk ki úgy, hogy két egymás melletti háromszöget nem színezhetünk ki. (Két háromszög egymás melletti, ha közös egy oldaluk.)
Hányféle színezés lehetséges?

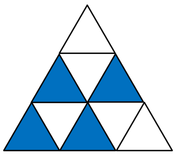
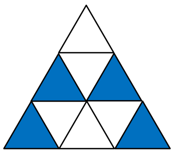
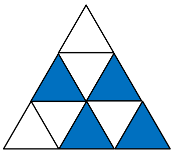
A felső sorban 0 vagy 1, a második sorban 0, 1 vagy 2 háromszöget színezhetünk, az alsó sorban maximum hármat. A lehetséges esetek:

	I.	II.	III.	IV.	V.
felső sor	0	0	1	1	1
középső sor	1	2	0	1	2
alsó sor	3	2	3	2	1

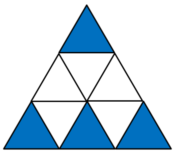
A lehetséges színezések ez egyes esetekben:
I. eset: 3 lehetőség.

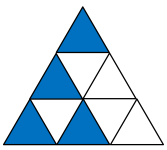
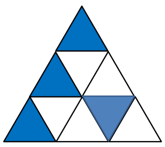
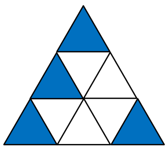
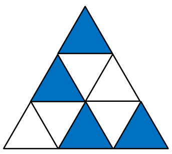
II. eset: 3 lehetőség.

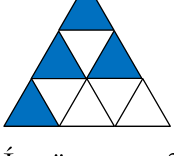
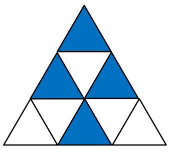
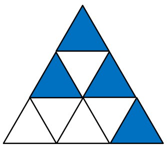
III. eset: 1 lehetőség.



IV. eset: 4 lehetőség a bal oldali, 4 lehetőség a jobb oldali háromszög színezésével.

V. eset: 3 lehetőség.

Így összesen 3 + 3 + 1 + 4 + 4 + 3 = **18-féle** színezés lehetséges.

ÖSSZESEN: 36 pont